

# 量子エンタングルメントと笠・高柳公式

中村研究室 久保田重丸

量子力学のコペンハーゲン解釈から、量子状態にある粒子は観測されて初めてスピンなどの物理量が確定する。またそのような粒子の状態はいくつかの状態の重ね合わせで表現される。もしそのそれぞれの状態が互いに逆のスピンをもつような2つの波動関数の積しかとりえないとき、片方の粒子のスピンを観測することでもう一方の粒子のスピンが決まることになる。このように不確定だった2つの粒子の片方の情報が確定したときにもう一方の粒子の情報も同時に確定するようなもつれた関係を量子エンタングルメント(量子もつれ)という。

このように量子エンタングルメント1つにつき2ビットの情報の価値が与えられることから、量子エンタングルメントに関する情報エントロピーを導入できる。これをエンタングルメントエントロピーという。量子系が部分系AとBに分割できる、つまり波動関数が特異値分解により  $|\Psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |\psi_i^A\rangle |\psi_i^B\rangle$  と書けるとき、全系の密度行列  $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  に対して、縮約密度行列  $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B[\hat{\rho}] = \sum_i \lambda_i |\psi_i^A\rangle\langle\psi_i^A|$  が導入できる。このとき、部分系Bから見たAのエンタングルメント・エントロピーは以下のように表される。

$$S_A = -\text{Tr}[\hat{\rho}_A \log \hat{\rho}_A]$$

この式はブラックホールにおける事象の地平面との類似性から、ブラックホールのエントロピーと対応していることが推測される。またブラックホールのエントロピーはベッケンシュタイン・ホーキング公式によりその表面積に比例しているが、ブラックホールの表面にマイクロな理論が存在しているというホログラフィー原理を考えることで、エントロピーが体積依存ではなく面積依存である理由を説明することができる。

ここでホログラフィー原理の重要な証拠となるのが、 $d+1$ 次元の共形場理論  $\text{CFT}_{d+1}$ (下図の平面)が1次元高い反ドジッター時空  $\text{AdS}_{d+2}$ (下図着色部分)と等価であるというゲージ・重力対応である[1]。反ドジッター時空(AdS)とはアインシュタイン方程式  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$  の宇宙定数  $\Lambda$  が負のときの時空であり、AdSブラックホールの計量

$$(ds)^2 = \frac{R_{\text{AdS}}^2}{z^2} \left( -f(z)(dt)^2 + \sum_{i=1}^d (dx_i)^2 + \frac{(dz)^2}{f(z)} \right), \quad f(z) = 1 - \left( \frac{4\pi z}{(d+1)\beta} \right)^{d+1}$$

から  $\Lambda < 0$  であることを確認することができる。ここで  $\beta$  は AdS ブラックホールの逆温度である。この AdS/CFT 対応から笠・高柳公式[2]

$$S_A = \frac{A(\Gamma_A)}{4G}$$

が得られる。ここで  $G$  は万有引力定数、 $A(\Gamma_A)$  は AdS 時空  $\Gamma_A$  の表面積である。

本発表では、空間次元  $d=1$  のときのスカラー場の理論について、エンタングルメントエントロピーを共形場理論の立場からレプリカ法を用いて導出し、1次元高い AdS 時空において笠・高柳公式を用いて導き出す方法と同じ結果となることを示し、笠・高柳公式が正しいことを確認する。さらに、エンタングルメント・エントロピーの観点からブラックホールの情報損失パラドックスが解決できることを議論する[3]。

## 参考文献

- [1] J. M. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) [Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998)]
- [2] S. Ryu and T. Takayanagi, *Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT*, Phys. Rev. Lett. **96** 181602 (2006)
- [3] 高柳 匡, 「量子エンタングルメントから創発する宇宙」, 共立出版, 2024 年

