Fermi 液体と朝永・Luttinger 液体との対応関係

中村研究室　　　望月 泰我

液体 ^{3}He や金属中の電子等、強く相互作用した Fermi 粒子の集団を扱うために、Landau が物理的考察から現象論的な立場で導入したものが Fermi 液体論である [1]。Fermi 液体論では、相互作用のない理想 Fermi 気体から、相互作用のある Fermi 液体へ断熱的に変化するとき、両者の粒子には 1 対 1 の対応関係があると考える。相互作用の効果を取り込んだ粒子 (準粒子) の基底状態からの分布のずれを $\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ とすると、系の単位体積当たりのエネルギー E は $\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}$ の 2 次までで、以下のように書ける。

$$E = E_0 + \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\epsilon_{\boldsymbol{p}\sigma}\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma} + \frac{1}{2}\frac{1}{V^2}\sum_{\boldsymbol{p}\sigma\boldsymbol{p}'\sigma'} f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma}\delta n_{\boldsymbol{p}'\sigma'}$$

ここで E_0 は基底状態のエネルギー、$\epsilon_{\boldsymbol{p}\sigma}$ は運動量が $\boldsymbol{p}$ でスピン σ の状態に 1 個だけ準粒子が励起されたときの系のエネルギー変化を表す。$f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}$ は準粒子間の相互作用であり、これを次のように部分波展開し、Fermi 面での状態密度 $N(0)$ で無次元化した Landau パラメータ $F_l^{\mathrm{s,a}}$ を導入する。

$$F_l^{\mathrm{s,a}} \equiv N(0) f_l^{\mathrm{s,a}}, \qquad \sum_{l=0} f_l^{\mathrm{s,a}} P_l(\cos\theta) \equiv \frac{1}{2}(f_{\boldsymbol{p}\uparrow,\boldsymbol{p}'\uparrow} \pm f_{\boldsymbol{p}\uparrow,\boldsymbol{p}'\downarrow})$$

ここで P_l は Legendre 多項式、θ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ のなす角である。相互作用の効果を取り込んだ物理量は、Landau パラメータを用いて記述することができ、低温で準粒子同士の衝突間隔が十分長いとき、第 1 音波 (通常の音波) は、第 0 音波と呼ばれる特異なモードへ推移することがわかる。Landau パラメータは粒子間の相互作用が弱い極限では微視的に導出することも可能である [2]。一般に、2,3 次元の Fermi 粒子系は準粒子の寿命が十分長いため、この Fermi 液体論を適用することができる。

一方、有機導体や量子細線等の 1 次元 Fermi 粒子系においては、強い量子揺らぎのために準粒子の寿命は保証されず、一般に Fermi 液体論は適用できないと考えられている。そして、低エネルギー特性は朝永・Luttinger(TL) 液体として記述される [3]。TL 液体理論では、ボゾン化法により系のハミルトニアンは以下のように電荷部分 $\mathcal{H}_\rho$ とスピン部分 $\mathcal{H}_\sigma$ とに分けられる。これを電荷・スピン分離と呼ぶ。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\rho + \mathcal{H}_\sigma, \qquad \mathcal{H}_\gamma = \int \mathrm{d}x \frac{1}{2}\left[2\pi u_\gamma K_\gamma \Pi_\gamma^2 + \frac{u_\gamma}{2\pi K_\gamma}\left(\frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial x}\right)^2\right] \qquad (\gamma = \rho, \sigma)$$

ここで Φ_γ と Π_γ は交換関係 $[\Phi_\gamma(x), \Pi_{\gamma'}(x')] = \mathrm{i}\delta(x-x')\delta_{\gamma,\gamma'}$ を満たす正準共役な量子場である。この場合相互作用の効果は TL パラメータ u_γ, K_γ に取り込まれており、これらを用いて物理量が表される。

以上のように、Fermi 粒子系は通常、2,3 次元では Fermi 液体、1 次元では TL 液体として別個に扱われるが、Fermi 面では次元にかかわらず準粒子の寿命が無限に長くなることを用いて、1 次元粒子系の熱力学量に対し、Fermi 液体論と TL 液体理論から得られた表式とを比較し、両者のパラメータ間に以下の対応関係が成り立つことを議論する [4]。

$$u_{\rho,\sigma} = v_{\mathrm{F}}\sqrt{(1+F_0^{\mathrm{s,a}})(1+F_1^{\mathrm{s,a}})}, \qquad K_{\rho,\sigma} = \sqrt{\frac{1+F_1^{\mathrm{s,a}}}{1+F_0^{\mathrm{s,a}}}}$$

[1] L. D. Landau, Sov. Phys. JETP **3**, 920 (1957); **5**, 101 (1957)
[2] V. M. Galitskii, Sov. Phys. JETP **7**, 104 (1958)
[3] S. Tomonaga: Prog. Theor. Phys. **5**, 349 (1950); J. M. Luttinger: J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963); D. C Mattis and E. H. Lieb, J. Math. Phys. **6**, 304 (1965); F. D. M. Haldane, J. Phys. C **14**, 2585 (1981)
[4] Yupeng Wang, *Fermi-liquid features of the one-dimensional Luttinger liquid*, Int. J. Mod. Phys. B **12**, 3465 (1998)