

物理数学II

中村正明

平成 29 年 1 月 26 日

目次

1	留数定理	2
1.1	正則関数と Cauchy-Riemann の方程式	3
1.2	Gauss-Green の定理	4
1.3	Cauchy の積分定理と Cauchy-Goursat の積分公式	5
1.4	Laurent 展開	6
1.5	留数定理	7
2	複素積分による実定積分	8
2.1	実軸上の積分	8
2.2	主値積分	10
2.3	多価関数	12
2.4	解析接続	13
3	等角写像	14
3.1	正則関数と等角性	14
3.2	写像の例	15
3.3	複素関数論の物理への応用: 2次元速度場、静電場	18
3.4	複素ポテンシャルの例	20
4	鞍点法	24
4.1	鞍点の存在	24
4.2	鞍点法による漸近形の評価	25
4.3	Stirling の公式の導出	26
4.4	Airy 関数	29
5	Fourier 解析	32
5.1	無限次元ベクトル空間	32
5.2	Fourier 級数	33
5.3	Fourier 変換と逆変換	37
5.4	Dirac の δ 関数	38
6	Laplace 変換	40
6.1	Laplace 変換と逆変換	40
6.2	Laplace 変換による微分方程式の解法	43
7	Γ, B 関数、楕円関数	44
7.1	Γ 関数と B 関数	44
7.2	楕円積分と楕円関数	45
7.3	Bernoulli 多項式と Euler-Maclaurin の総和公式	47
8	偏微分方程式 / 微分方程式の級数解、特殊関数	50
8.1	偏微分方程式の導出	50
8.2	変数分離法	52
8.3	微分方程式の級数解法	53
8.4	超幾何関数と合流型超幾何関数	54
8.5	直交多項式	56
9	ベクトル解析と座標変換	58
9.1	ベクトル解析の復習	58
9.1.1	Gauss の定理とその応用	58
9.1.2	Stokes の定理とその応用	59
9.2	Levi-Civita テンソルを用いたベクトル解析	61
9.2.1	縮約公式	61
9.2.2	Levi-Civita テンソルによるベクトル演算公式の証明	63
9.2.3	ベクトルの微分演算の公式とその応用	64
9.3	直交曲線座標における座標変換	67

10 Legendre 多項式、球面調和関数	68
10.1 双極子ポテンシャルと Legendre 多項式	68
10.2 球面調和関数と Legendre 陪関数	71
11 Bessel 関数	78
11.1 円筒座標系での波動方程式	78
11.2 2次元波動方程式 (円形膜の振動)	80
11.3 球対称な系での波動方程式と球 Bessel 関数	81
11.4 Laplace 方程式 ($k = 0$) の動径関数	81
11.5 Bessel 関数の性質	82
11.6 球 Bessel 関数の性質	85
11.7 惑星の運動	87
11.8 1次元格子振動	88
12 境界値問題と Green 関数	90
12.1 Green 関数の一般的性質	90
12.2 Sturm-Liouville 型方程式に対する Green 関数	90
12.3 Helmholtz 型方程式に対する Green 関数	92
12.4 Green 関数の物理的意味	93
A 超幾何関数と合流型超幾何関数の例	94
A.1 超幾何関数	94
A.2 合流型超幾何関数	96